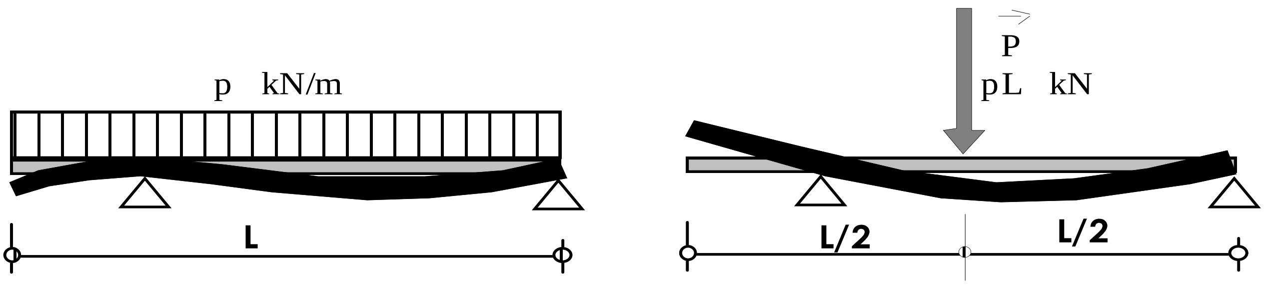
RESOLUTION POUTRES HYPERSTATIQUES



Sommaire

1. RAPPELS RdM FONDAMENTAUX

La "déformée" représente l'allure de la ligne moyenne après déformation.
Les "flèches" représentent les déplacements maximums pris par la déformée.

Relation entre la rotation et le rayon de courbure :

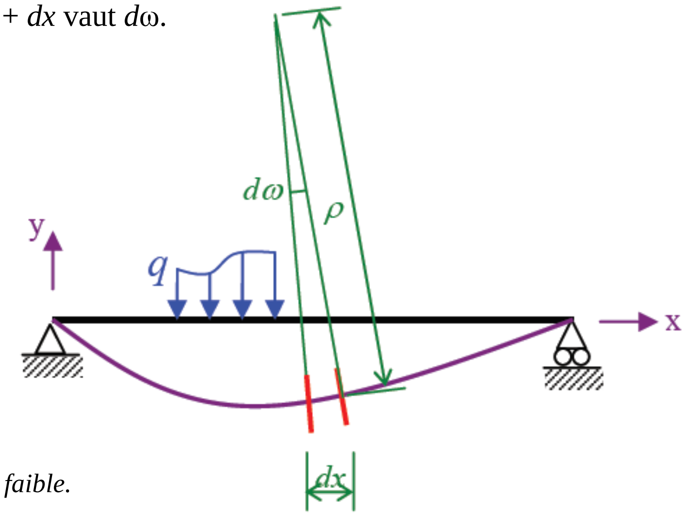
Soient deux sections infiniment proches dont la variation d'abscisse vaut *dx*.
La variation de la rotation de la section en *x* à la section en *x* + *dx* vaut *d*ω.

On démontre que:

$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} \approx d\omega$$

$$\text{donc } \rho = \frac{dx}{d\omega}$$

$$\frac{1}{\rho} = \omega'(x)$$



*la rotation d*ω *peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment faible.*

Relation entre la flèche et le moment :

En combinant les différentes relations on obtient:

$$\omega(x) = f'(x) \qquad \frac{1}{\rho} = \omega'(x) \qquad \frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_z}{EI_{GZ}}y$$

$$f''(x) = \omega'(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$$

<u>En résumé:</u>

Equation de la rotation ω(x)

$$\boxed{\omega(x) = f'(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}dx}$$

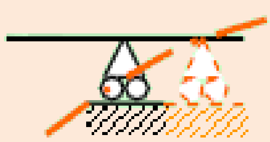
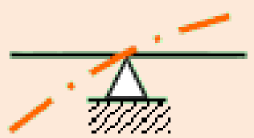
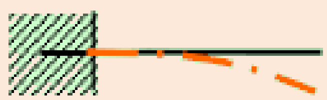
Equation de la déformée f(x)

$$\boxed{f(x) = \iint \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}dx^2}$$

En intégrant deux fois l'expression $\frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$ des **<u>constantes d'intégration</u>** apparaissent.

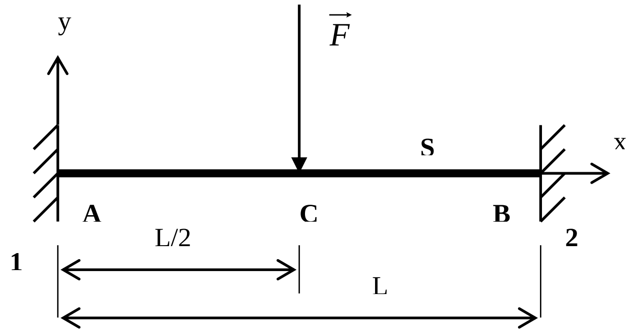
Afin de déterminer leurs valeurs, il est nécessaire de connaître la flèche ou la rotation en certains points particuliers.

Nous savons que les appuis bloquent des mouvements :

Conditions aux limites		
Appui simple	**Articulation**	**Encastrement**
		
y' = ω = rotation quelconque **flèche nulle y = f = 0**	**y' = ω = rotation quelconque** **flèche nulle y = f = 0**	**y' = ω = 0 rotation nulle** **flèche nulle y = f = 0**

2. Poutres hyperstatiques (Poutre bi-encastrée avec force ponctuelle):

Les seules équations de la statique ne suffisant pas pour résoudre le calcul des actions aux appuis.
Il faut faire intervenir en plus les équations de déformations .



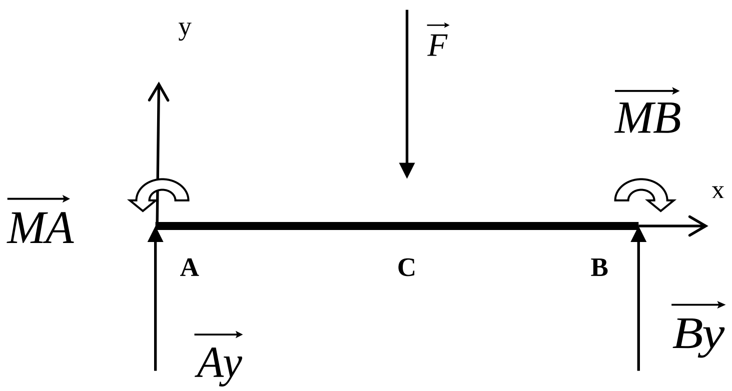
<u>Exemple 1:</u>

Une poutre AB de longueur **L = 4m**
IPE 120 (I_{GZ} = 317,8 cm^4 ; E = 2.10^5 MPa)
Encastrée à ses deux extrémités
supporte en C une charge $\vec{F} = -5000.N$

<u>Déterminer les actions en A et B</u>
Equations de statique :

$Ay = By = \frac{F}{2}$ (Symétrie)

$\sum Mz/A = MA - \frac{FL}{2} + MB + BY \times L = 0$



avec $MA = MB$ (symétrie)

le système est hyperstatique d'ordre 1

Equation de déformation :

Calcul du moment fléchissant quand $0 \le x \le \frac{L}{2}$

$M_{fz} = AY.x - MA$

Utilisation de l'expression de la déformée

$E.I_{GZ}.y'' = AY.x - MA$

$E.I_{GZ}.y' = AY.\frac{x^2}{2} - MA.x + C_1$

$E.I_{GZ}.y = AY.\frac{x^3}{6} - MA.\frac{x^2}{2} + C_1.x + C_2$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ (Conditions aux limites)

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ Donc $E.I_{GZ}.y = Ay.\frac{x^3}{6} - MA.\frac{x^2}{2}$

Autre solution la rotation est nulle au Pt C

C'est-à-dire pour $x = \frac{L}{2}$ de plus $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Donc $E.I_{GZ}.y' = AY.\frac{x^2}{2} - MA.x = 0$

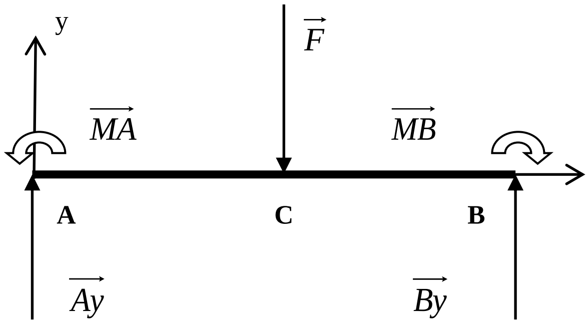
Soit $y'\left[\frac{L}{2}\right] = \frac{F}{2} \times \frac{L^2}{2 \times 4} - MA \times \frac{L}{2} = 0$

Et $MA = \frac{2FL^2}{16 \times L} = \frac{FL}{8}$

Compte tenu de la symétrie de la déformée : $y'(\frac{L}{2}) = 0$ donc

$$0 = Ay.\frac{\left[\frac{L}{2}\right]^2}{2} - MA.\frac{L}{2} = \frac{Ay}{2}\left[\frac{L}{2}\right]^2 - MA.\frac{L}{2} \Rightarrow MA = \frac{\frac{Ay}{2}\left[\frac{L}{2}\right]^2}{\frac{L}{2}} = \frac{Ay.L}{4}$$

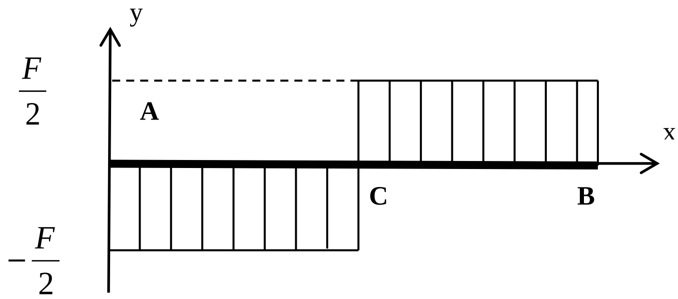
$Ay = \frac{F}{2}$ donc $\boxed{MA = -MB = \frac{F.L}{8}}$



Effort tranchant

$$0 \le x \le \frac{L}{2}\ :\ Vy = -\frac{F}{2} = -2500N$$

$$\frac{L}{2} \le x \le L\ :\ Vy = \frac{F}{2} = 2500N$$



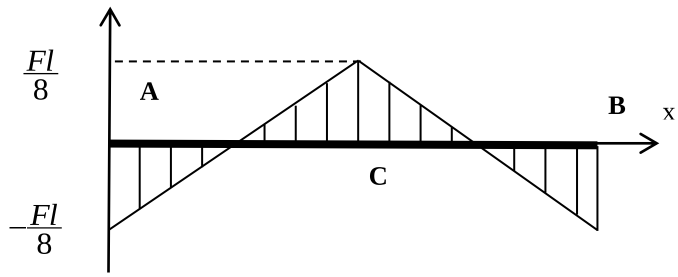
Moment fléchissant

$$x{=}0\ :\ M_{fz} = -\frac{FL}{8} = -\frac{5000.4}{8} = -2500N.m$$

$$x{=}\frac{l}{2}\ :\ M_{fz} = \frac{FL}{8} = \frac{5000.4}{8} = 2500N.m$$

$$x{=}l\ :\ M_{fz} = -\frac{FL}{8} = -\frac{5000.4}{8} = -2500N.m$$

Flèche maximale au point C



$$E.I_{GZ}.y = Ay.\frac{x^3}{6} - MA.\frac{x^2}{2} = \frac{F}{12}.x^3 - \frac{FL}{16}.x^2$$

$$E.I_{GZ}.y == \frac{F}{12} \times \frac{L^3}{8} - \frac{FL}{16} \times \frac{L^3}{4} = \frac{FL^3}{96} - \frac{FL^3}{64} = \frac{FL^3}{32}(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = -\frac{FL^3}{192}$$

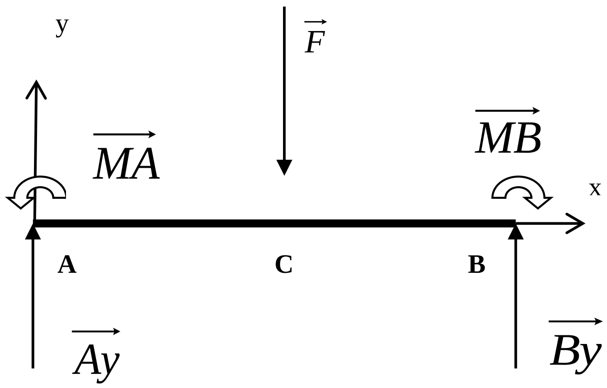
$$\boxed{f\max = -\frac{F.L^3}{192.E.I_{GZ}}}$$

$$f\max = y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5000 \times 4000^3}{192 \times 200000 \times 317{,}8 \times 10^{+4}} = -2{,}62\,mm$$

3. Flèches associées (Poutre bi-encastrée avec force ponctuelle)

AUTRE Méthode

Même Exemple 1:



Déterminer les actions en A et B

Equations de statique :

$Ay = By = \dfrac{F}{2}$ (symétrie)

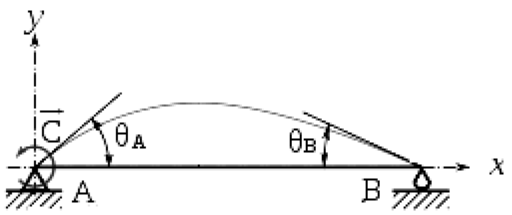
$\sum Mz / A = MA - \dfrac{FL}{2} + MB + BY \times L = 0$

avec $MA = MB$ (symétrie)

le système est hyperstatique d'ordre 1

Calcul du moment fléchissant quand $0 \le x \le \dfrac{L}{2}$

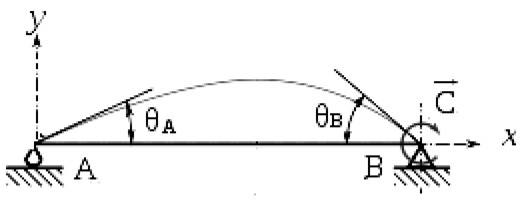
$M_{fz} = AY.x - MA$



couple concentré en A

$W_A = \dfrac{CL}{3EI}$ $\quad WA_{iso-Couple1}$

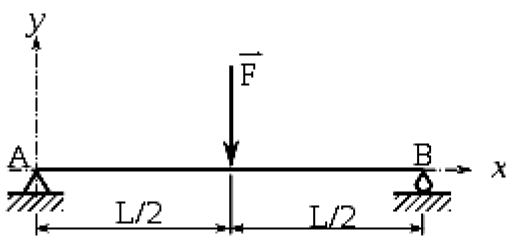
$W_B = -\dfrac{CL}{6EI}$



couple concentré en B

$W_A = \dfrac{CL}{6EI}$ $\quad WA_{iso-Couple2}$

$W_B = -\dfrac{CL}{3EI}$



charge concentrée au centre

$W_A = -\dfrac{FL^2}{16EI}$ $\quad WA_{iso1}$

$W_B = +\dfrac{FL^2}{16EI}$

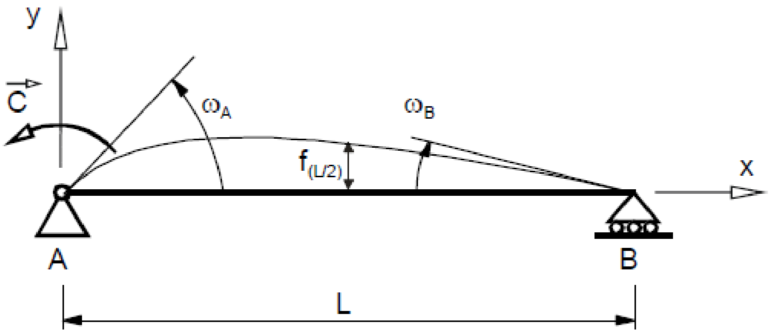
Sachant que la rotation est nulle aux points A et B:

[WA=WB = 0 car nous avons 1 encastrement sur chaque appui]

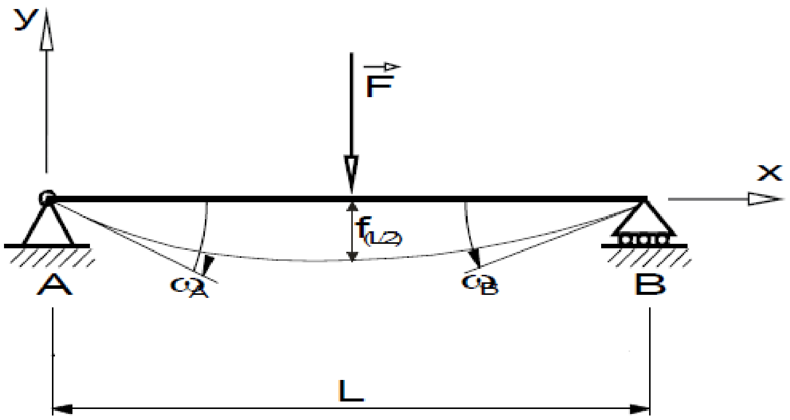
La somme des rotations→ $\sum WA_{iso1} + WA_{iso-Couple1} + WA_{iso-Couple2} = 0$

Donc : $-\frac{FL^2}{16.EI} + \frac{CL}{3.EI} + \frac{CL}{6.EI} = 0 \quad \Rightarrow \frac{CL}{3.EI} + \frac{CL}{6.EI} = \frac{FL^2}{16.EI}$

$$\Rightarrow \frac{3.CL}{6.EI} = \frac{FL^2}{16.EI} \qquad \Rightarrow \frac{CL}{2} = \frac{FL^2}{16} \qquad \boxed{\Rightarrow C = MA = -MB = \frac{FL}{8}} \qquad \boxed{donc\ \ MA = -MB = \frac{F.L}{8}}$$



$$\boxed{f_{(L/2)} = \frac{CL^2}{16EI}}$$



$$\boxed{f_{(L/2)} = \frac{F\,L^3}{48EI}}$$

$$flèche\ totale = -\frac{F.L^3}{48EI} + 2\ fois\ \frac{C.L^2}{16EI} \quad avec\ \ C = \frac{FL}{8}$$

$$flèche = -\frac{F.L^3}{48EI} + \frac{2 \times \frac{FL}{8}.L^2}{16EI} \qquad flèche = -\frac{F.L^3}{EI}\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{64}\right) = -\frac{F.L^3}{EI}\left(\frac{4}{192} - \frac{3}{192}\right)$$

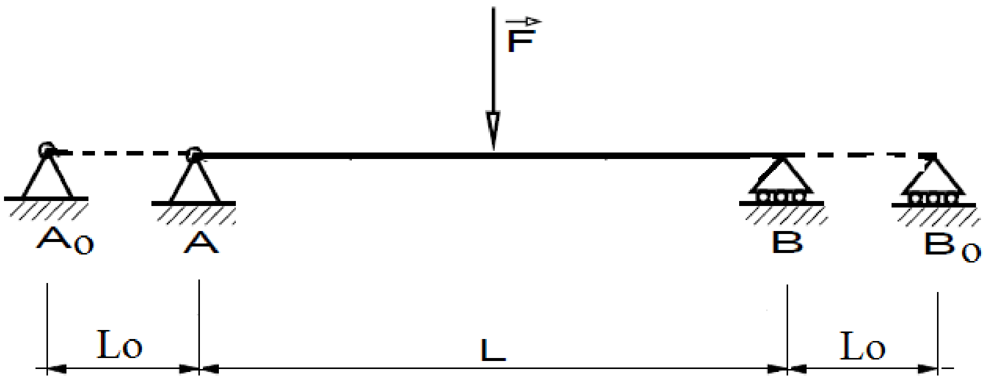
$$\boxed{flèche\,(L/2) = -\frac{F.L^3}{192EI}} \qquad f\ \max = y\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5000 \times 4000^3}{192 \times 200000 \times 317{,}8 \times 10^{+4}} = -2{,}62\,mm$$

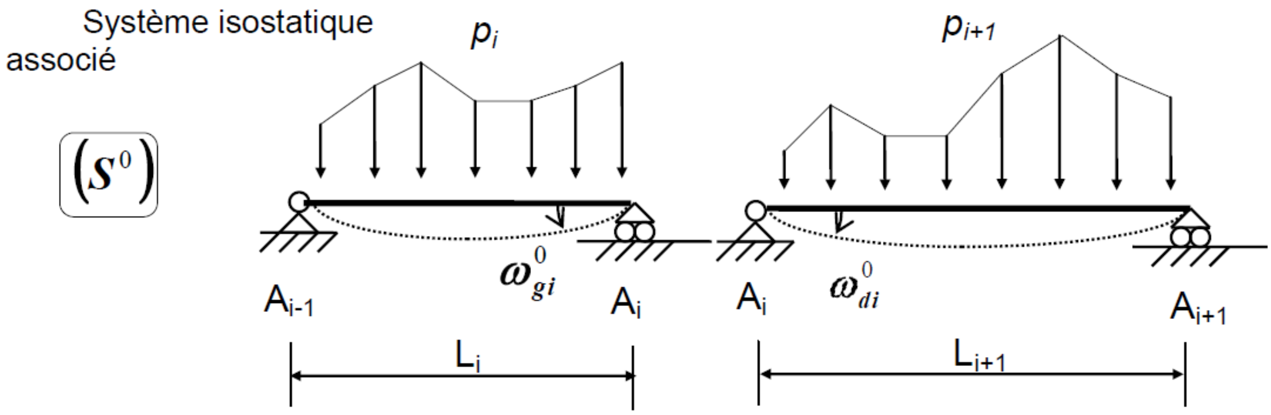
4. Méthode formule des 3 moments(Poutre bi-encastrée avec force ponctuelle).

AUTRE Méthode

On remplace l'encastrement en A et B par des appuis fictifs Ao et Bo

Avec une Longueur Lo $\approx$ 0.00 très petite, ainsi que Wgi $\approx$ 0.00





$$\boxed{L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1})M_i + L_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\omega^0_{di} - \omega^0_{gi})}$$

On choisit le point A comme référence avec Mo = 0; Lo=0; <u>MA=MB</u>; et Wg=0

$$Lo.Mo + 2(Lo + L).MA + L.MB = 6EI(\omega d - \omega g)$$

$$donc \Rightarrow 0 + 2(0 + L).MB + L.MB = 6EI(\omega d - 0)$$

$$et \Rightarrow 3.L.MB = 6EI(\omega d) \qquad on\,sait\,que\ \omega d = -\frac{FL^2}{16EI}$$

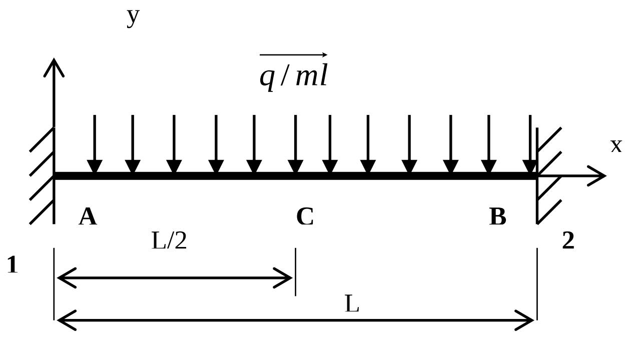
$$soit \Rightarrow 3.L.MB = 6EI(-\frac{FL^2}{16EI}) \qquad \boxed{\Rightarrow MB = \frac{6}{3} \times \frac{FL}{16} = -\frac{FL}{8}}$$

$$\boxed{donc\ MA = -MB = \frac{F.L}{8}}$$

5. Poutres hyperstatiques (Poutre bi-encastrée avec chargement uniforme)

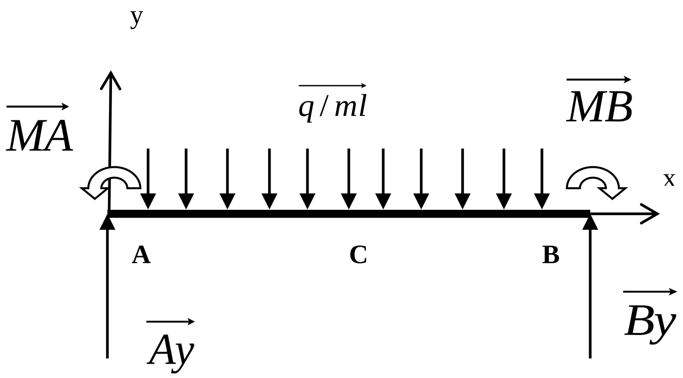
Les seules équations de la statique ne suffisant pas pour résoudre le calcul des actions aux appuis.
Il faut faire intervenir en plus les équations de déformations .

Exemple 2



Une poutre AB de longueur **L= 4m**
IPE 120 (I_{GZ} = 317,8 cm^4 ; E = 2.10^5 MPa)
Encastrée à ses deux extrémités
supporte une charge uniforme $\vec{q} = -1800.N/m$

Déterminer les actions en A et B



Equations de statique :

$$Ay = By = \frac{qL}{2} \text{ (symétrie)}$$

$$\sum Mz/A = MA - \frac{qL^2}{2} + MB + BY \times L = 0$$

avec $MA = MB$ (symétrie)

le système est hyperstatique d'ordre 1

Equation de déformation :
Calcul du moment fléchissant quand $0 \le x \le L$

$$M_{fz} = AY.x - MA - \frac{qx^2}{2}$$

Utilisation de l'expression de la déformée

$$E.I_{GZ}.y'' = AY.x - MA - \frac{qx^2}{2}$$

$$E.I_{GZ}.y' = AY.\frac{x^2}{2} - MA.x - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$E.I_{GZ}.y = AY.\frac{x^3}{6} - MA.\frac{x^2}{2} - \frac{qx^4}{24} + C_1.x + C_2$$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ (conditions aux limites)

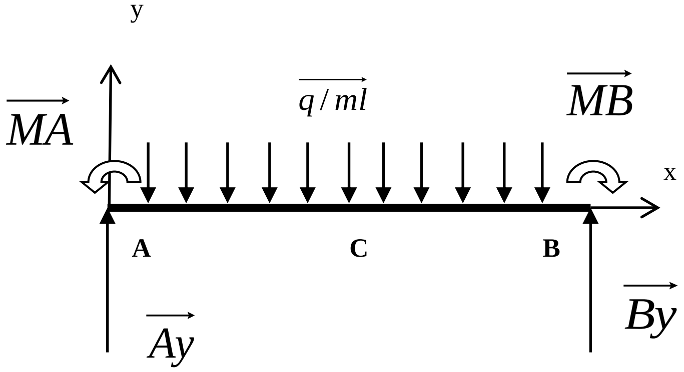
$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ donc $E.I_{GZ}.y = Ay.\frac{x^3}{6} - MA.\frac{x^2}{2} - \frac{qx^4}{24}$

Compte tenu de la symétrie de la déformée : $y'(\frac{L}{2}) = 0$ donc

$$0 = Ay.\frac{(\frac{L}{2})^2}{2} - MA.\frac{L}{2} - \frac{q\frac{L^3}{8}}{6} = \frac{Ay}{2}(\frac{L}{2})^2 - MA.\frac{L}{2} - \frac{qL^3}{48} \Rightarrow MA = \frac{\frac{Ay}{2}(\frac{L}{2})^2 - \frac{qL^3}{48}}{\frac{L}{2}} = \frac{Ay.L}{4} - \frac{qL^2}{24}$$

avec $Ay = \frac{qL}{2}$ donc $MA = \frac{qL^2}{8} - \frac{qL^2}{24} = \frac{qL^2(3-1)}{24} = \frac{qL^2}{12}$

$$\boxed{\text{donc } MA = -MB = \frac{qL^2}{12}}$$

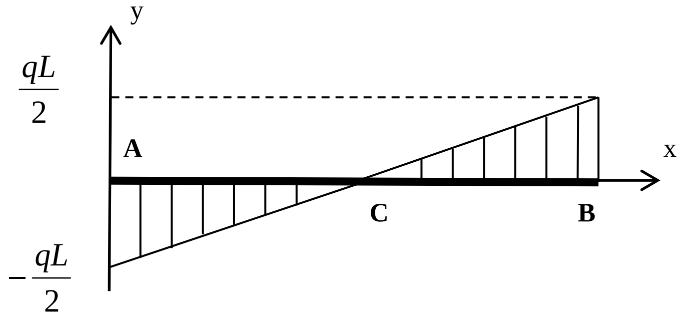


Effort tranchant

$$0 \le x \le L \ : \ Vy = -\left[\frac{qL}{2} - q(x)\right] = q(x - \frac{L}{2})$$

$$x{=}0 \ : \ Vy = -\frac{qL}{2} = -\frac{1800.4}{2} = -3600N$$

$$x = L \ : \ Vy = +\frac{qL}{2} = +\frac{1800.4}{2} = +3600N$$



Moment fléchissant

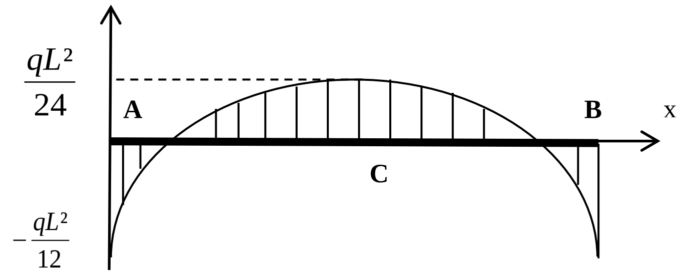
$$M_{fz} = \frac{qL}{2}x - MA - \frac{qx^2}{2}$$

$$x{=}0 \ : \ M_{fz} = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{1800 \times 16}{12} = -2400N.m$$

$$x{=}\frac{l}{2} \ : \ M_{fz} = \frac{qL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{qL^2}{12} - \frac{qL^2}{2 \times 4}$$

$$M_{fz} = \frac{qL^2}{2} \times \frac{(6-2-3)}{24} = \frac{qL^2}{24} = \frac{1800 \times 16}{24} = 1200N.m$$

$$x{=}l \ : \ M_{fz} = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{1800 \times 16}{12} = -2400N.m$$



Flèche maximale au point C

$$E.I_{GZ}.y = Ay.\frac{x^3}{6} - MA.\frac{x^2}{2} - \frac{qx^4}{24}$$

$$E.I_{GZ}.y = Ay.\frac{x^3}{6} - MA.\frac{x^2}{2} - \frac{qx^4}{24} = \frac{qL}{2 \times 6}x^3 - \frac{qL}{12 \times 2}x^2 - \frac{qx^4}{24}$$

$$E.I_{GZ}.y == \frac{qL}{12}.\frac{L^3}{2^3} - \frac{qL^2}{12}.\frac{L^2}{2 \times 4} - \frac{qL^4}{2^4 \times 24} = qL^4\left[\frac{1}{96} - \frac{1}{96} - \frac{1}{384}\right] = -\frac{qL^4}{384}$$

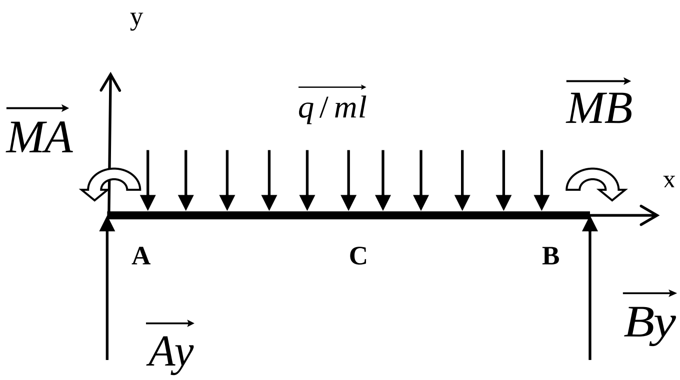
$$\boxed{f\ \text{max} = -\frac{qL^4}{384.E.I_{GZ}}}$$

$$f\ \text{max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1800 \times 10^{-3} \times 4000^4}{384 \times 200000 \times 317{,}8 \times 10^{+4}} = -1{,}88\,mm$$

6. Flèches associées (Poutre bi-encastrée avec chargement uniforme)

AUTRE Méthode

<u>Même Exemple 2:</u>



<u>Déterminer les actions en A et B</u>

Equations de statique :

$Ay = By = \frac{qL}{2}$ (symétrie)

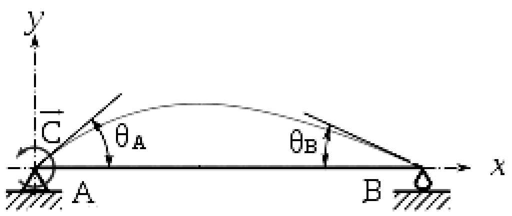
$\sum Mz/A = MA - \frac{qL^2}{2} + MB + BY \times L = 0$

avec $MA = MB$ (symétrie)

le système est hyperstatique d'ordre 1

Calcul du moment fléchissant quand $0 \le x \le L$

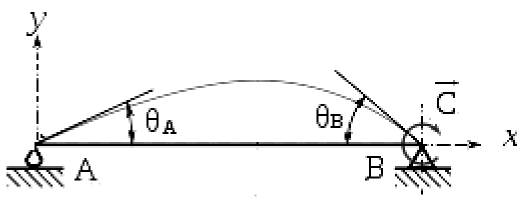
$M_{fz} = AY.x - MA - \frac{qx^2}{2}$



couple concentré en A

$W_A = \frac{CL}{3EI}$ $\boxed{WA_{iso-Couple1}}$

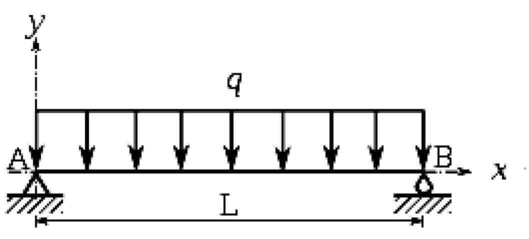
$W_B = -\frac{CL}{6EI}$



couple concentré en B

$W_A = \frac{CL}{6EI}$ $\boxed{WA_{iso-Couple2}}$

$W_B = -\frac{CL}{3EI}$



charge uniforme

$W_A = \frac{-qL^3}{24EI}$ $\boxed{WA_{iso1}}$

$W_B = \frac{+qL^3}{24EI}$

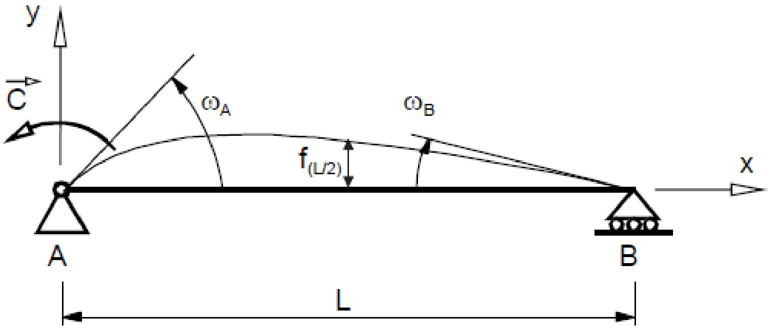
Sachant que la rotation est nulle aux points A et B:

[WA=WB = 0 car nous avons 1 encastrement sur chaque appui]

La somme des rotations $\rightarrow \sum WA_{iso1} + WA_{iso-Couple1} + WA_{iso-Couple2} = 0$

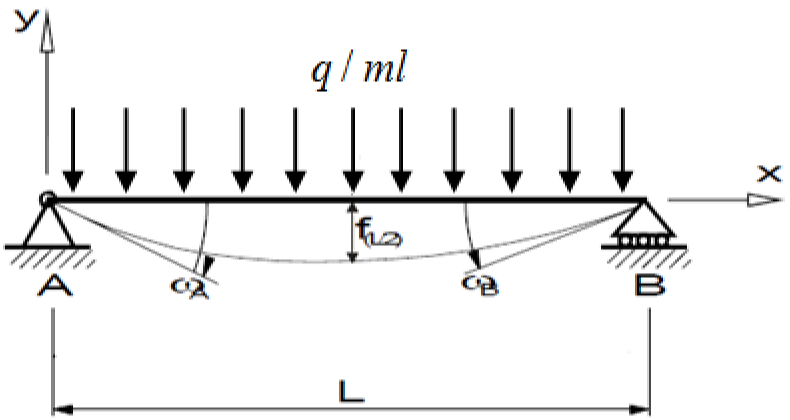
Donc : $-\dfrac{qL^3}{24.EI} + \dfrac{CL}{3.EI} + \dfrac{CL}{6.EI} = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{CL}{3.EI} + \dfrac{CL}{6.EI} = \dfrac{qL^3}{24.EI}$

$$\Rightarrow \frac{3.CL}{6.EI} = \frac{qL^3}{24.EI} \qquad \Rightarrow \frac{CL}{2} = \frac{qL^3}{24.EI} \qquad \boxed{\Rightarrow C = MA = -MB = \frac{qL^2}{12.EI}} \qquad \boxed{donc\ \ MA = -MB = \frac{q.L^2}{12}}$$



$$\boxed{f_{(L/2)} = \frac{CL^2}{16EI}}$$

$flèche\ à\ \dfrac{L}{2}\ due\ à\ un\ couple\ (C)$



$$\boxed{f(L/2) = \frac{-5.P.l^4}{384.E.I_{GZ}}}$$

$$flèche\ \ totale = -\frac{5.q.L^4}{384EI} + 2\ fois\ \frac{C.L^2}{16EI} \quad avec\ \ C = \frac{qL^2}{12}$$

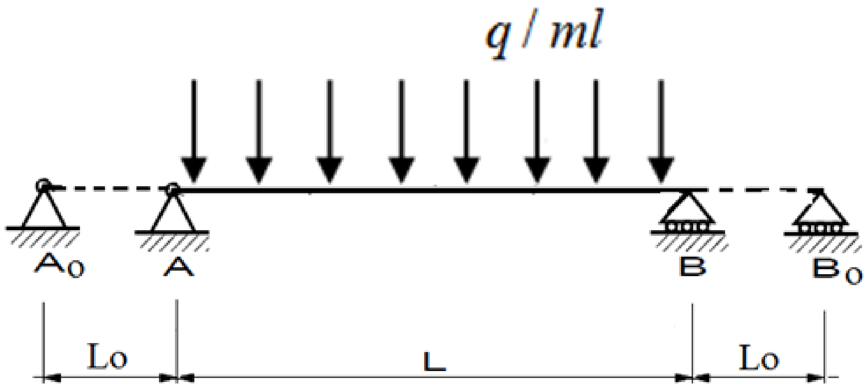
$$flèche = -\frac{5.q.L^4}{384EI} + \frac{2\times\frac{qL^2}{12}.L^2}{16EI} \qquad flèche = -\frac{q.L^4}{EI}\left(\frac{5}{384} - \frac{1}{96}\right) = -\frac{q.L^4}{EI}\left(\frac{5}{384} - \frac{4}{384}\right)$$

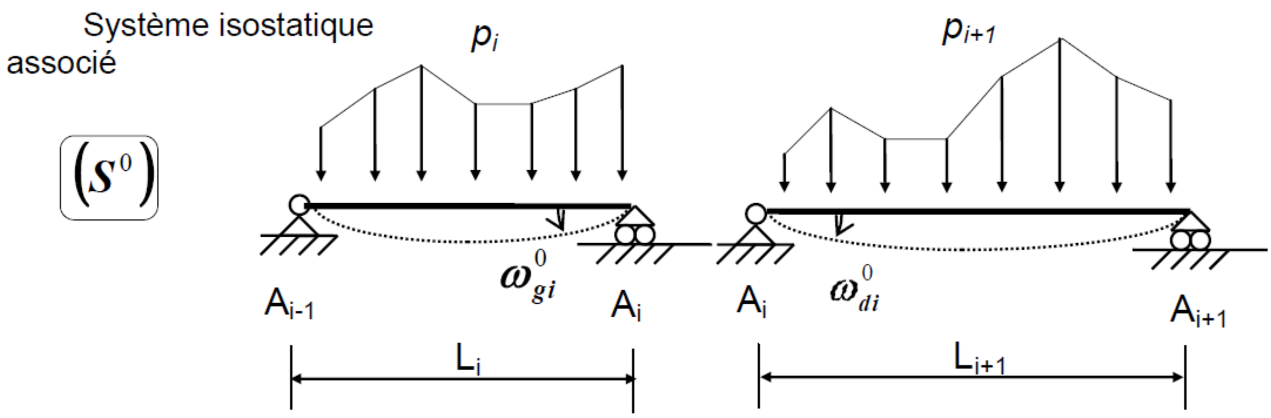
$$\boxed{flèche(L/2) = -\frac{q.L^4}{384EI}} \qquad f\ \max = y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{1800\times10^{-3}\times4000^4}{384\times200000\times317{,}8\times10^{+4}} = -1{,}88\,mm$$

7. Méthode formule des 3 moments (Poutre bi-encastrée avec chargement uniforme)

On remplace l'encastrement en A et B par des appuis fictifs Ao et Bo **AUTRE Méthode**

Avec une Longueur Lo ≈ 0.00 très petite, ainsi que Wgi ≈ 0.00





$$\boxed{L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1})M_i + L_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\omega_{di}^0 - \omega_{gi}^0)}$$

On choisit le point A comme référence avec Mo = 0; Lo=0; <u>MA=MB</u>; et Wg=0

$$Lo.Mo + 2(Lo + L).MA + L.MB = 6EI(\omega d - \omega g)$$

$$donc \Rightarrow 0 + 2(0 + L).MB + L.MB = 6EI(\omega d - 0)$$

$$et \Rightarrow 3.L.MB = 6EI(\omega d) \qquad on\,sait\,que\;\omega d = -\frac{qL^3}{24EI}$$

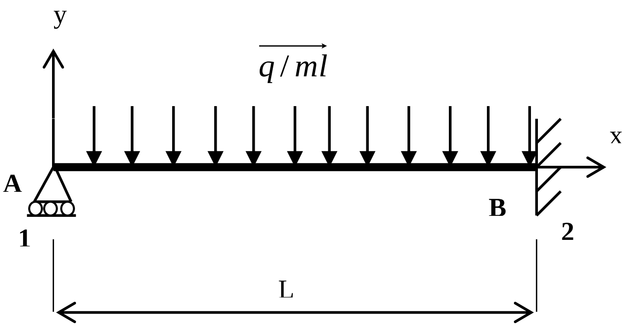
$$soit \Rightarrow 3.L.MB = 6EI(-\frac{qL^3}{24EI}) \qquad \boxed{\Rightarrow MB = \frac{6}{3} \times \frac{-qL^2}{24} = -\frac{qL^2}{12}}$$

$$\boxed{donc\;\; MA = -MB = \frac{qL^2}{12}}$$

8. Poutres hyperstatiques (Poutre Encastrée + appui simple avec chargement uniforme)

[CAS Hyperstatique d°1]

Les seules équations de la statique ne suffisant pas pour résoudre le calcul des actions aux appuis.
Il faut faire intervenir en plus les équations de déformations .



Exemple 3

Une poutre AB de longueur **L= 8m**
IPE 200 (I_{GZ} = 1943 cm^4 ; E = 2.10^5 MPa)
Encastrée à une extrémité +appui simple.
supporte une charge $\vec{q} = -1700.N/m$

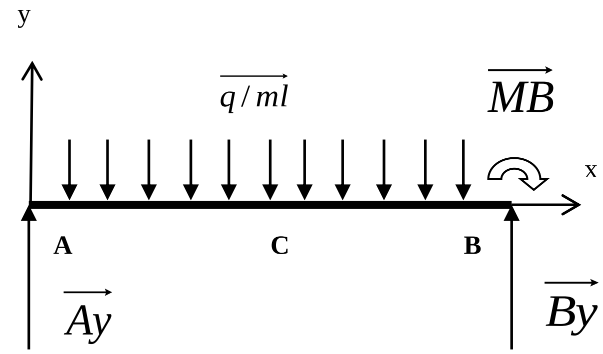
Déterminer les actions en A et B

Equations de statique :

$$Ay + By = \frac{qL}{2}$$ (PAS DE symétrie)

$$\sum Mz/A = -\frac{qL^2}{2} + MB + BY \times L = 0$$

avec $MA = 0 \;\; et \;\; MB \neq 0$ (pas de symétrie)



le système est hyperstatique d'ordre 1

Equation de déformation :
Calcul du moment fléchissant quand $0 \leq x \leq L$

$$M_{fz} = Ay.x - \frac{qx^2}{2}$$

Utilisation de l'expression de la déformée

$$E.I_{GZ}.y'' = Ay.x - \frac{qx^2}{2}$$

$$E.I_{GZ}.y' = Ay.\frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$E.I_{GZ}.y = AY.\frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_1.x + C_2$$

Hypothèses fondamentales :
(Pour les conditions aux limites)
y'=0 pour *x = L*
y=0 pour *x = 0* (appui ponctuel d'axe $\vec{y}$)
y =0 pour x = L (La déformée est nulle)

$y'(L) = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0$ (ici il faut trouver C_1)

$$E.I_{GZ}.y' = Ay.\frac{L^2}{2} - \frac{qL^3}{6} + C_1 = 0 \qquad \boxed{C_1 = -Ay.\frac{L^2}{2} + \frac{qL^3}{6}}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ donc $E.I_{GZ}.y = Ay.\frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_1.x$

Conditions aux limites flèche y =0 pour x = L donc

$$0 = Ay.\frac{L^3}{6} - \frac{qL^4}{24} - \left[Ay \times \frac{L^2}{2} \times L\right] + \left[\frac{qL^3}{6} \times L\right] \qquad Ay \times \left[\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{2}\right] = \left[\frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{6}\right] \; donc \; Ay \times \left[-\frac{2L^3}{6}\right] = \left[-\frac{3qL^4}{24}\right]$$

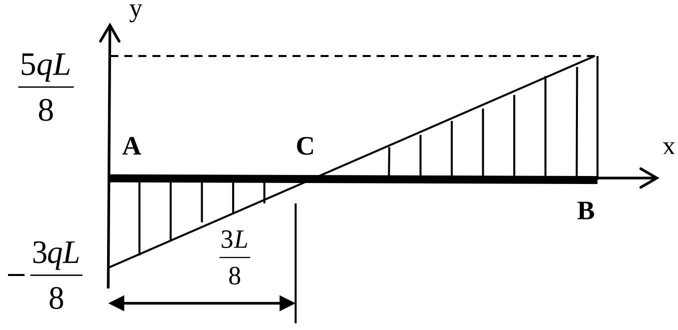
soit $Ay \times \left[\frac{L^3}{3}\right] = \left[\frac{qL^4}{8}\right]$ donc et avec : $\boxed{Ay = \frac{3qL}{8}}$ $\qquad Ay + By = \frac{qL}{2} \; donc$ $\boxed{By = \frac{5qL}{8}}$

<u>Effort tranchant</u>

$$0 \le x \le L \;:\; Vy = -\left[\frac{3qL}{8} - q(x)\right] = q\left(x - \frac{3L}{8}\right)$$

$$x=0 \;:\; Vy = -\frac{3qL}{8} = -\frac{3\times1700\times8}{8} = -5100N$$

$$x = L \;:\; Vy = +\frac{5qL}{8} = +\frac{5\times1700\times8}{8} = +8500N$$

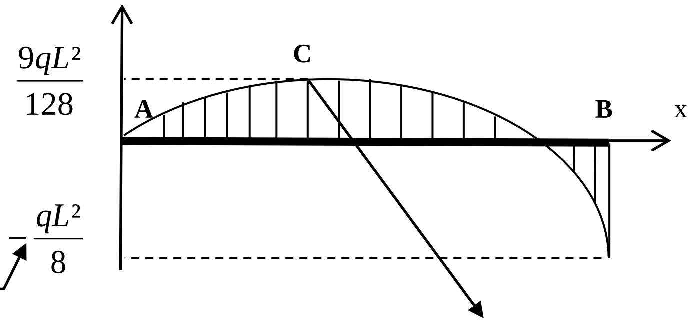


<u>Moment fléchissant</u>

$$M_{fz}(x) = Ay.x - \frac{qx^2}{2} \qquad M_{fz}(x) = \frac{3qL}{8}.x - \frac{qx^2}{2}$$

Pour x = L on a:

$$M_{fz}(L) = MB = \frac{3qL}{8}\times L - \frac{qL^2}{2} = qL^2\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right)$$



donc $\boxed{MB = -\frac{qL^2}{8}}$

$$MC_{fz}\left(\frac{3L}{8}\right) = MC = \frac{3qL}{8}\times\frac{3L}{8} - \frac{q}{2}\times\left[\frac{3L}{8}\right]^2 = qL^2\left(\frac{9}{64} - \frac{9}{2\times64}\right) \qquad \boxed{MC = +\frac{9qL^2}{128}}$$

<u>Flèche maximum pour</u> $\Rightarrow E.I_{GZ}.y' = 0$ **recherche de la position de x_o** avec l'équation de la rotation y'

$$E.I_{GZ}.y' = Ay.\frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \qquad C_1 = -Ay.\frac{L^2}{2} + \frac{qL^3}{6}$$

$$\boxed{avec\ C_1 = -\frac{3qL^3}{16} + \frac{qL^3}{6} = qL^3\left[\frac{-3x3}{48} + \frac{8}{48}\right] = -\frac{qL^3}{48}}$$

$$E.I_{GZ}.y' = \frac{3qL}{8}.\frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1 = 0 \qquad E.I_{GZ}.y' = \frac{3qLx^2}{16} - \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^3}{48} = 0$$

$$E.I_{GZ}.y' = \frac{9qLx^2}{48} - \frac{8qx^3}{48} - \frac{qL^3}{48} = 0 \qquad E.I_{GZ}.y' = 9qLx^2 - 8qx^3 - qL^3 = 0$$

$$il\ \ faut\ \ résoudre \Rightarrow -8x^3 + 9Lx^2 - L^3 = 0 \qquad \boxed{solution\ x_o = \frac{L\left(\sqrt{33}+1\right)}{16} \approx 0{,}4215L}$$

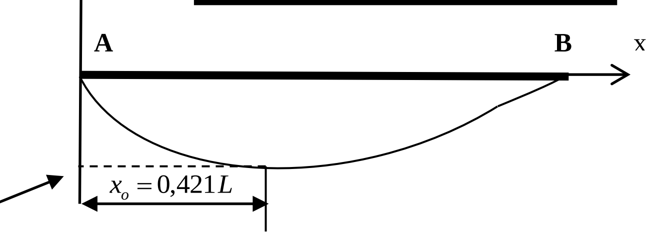
Calcul de la flèche max

$$E.I_{GZ}.y = AY.\frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_1.x$$

$$E.I_{GZ}.y = \frac{3qLx^3}{48} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{48}$$

$$E.I_{GZ}.y = \frac{3qLx^3 - 2qx^4 - qL^3x}{48}$$

<u>Exemple 3:</u> Poutre AB en IPE 200
q= 1700 N/m de longueur L= 8m
I_{GZ} = 1943 cm^4 ; E = 2.10^5 MPa)



$$\boxed{pour\ x = 0.421L \Leftrightarrow y_{max} \approx \frac{-qL^4}{185E.I_{GZ}}}$$

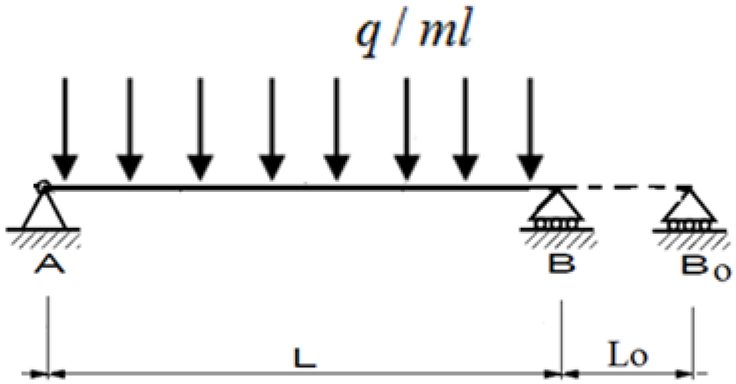
$$\boxed{pour\ x = 0.421L \approx 3{,}37m \Leftrightarrow y_{max} \approx \frac{-1700\times10^{-3}\times8000^4}{185\times200000\times1943\times10^{+4}} = -9{,}68mm}$$

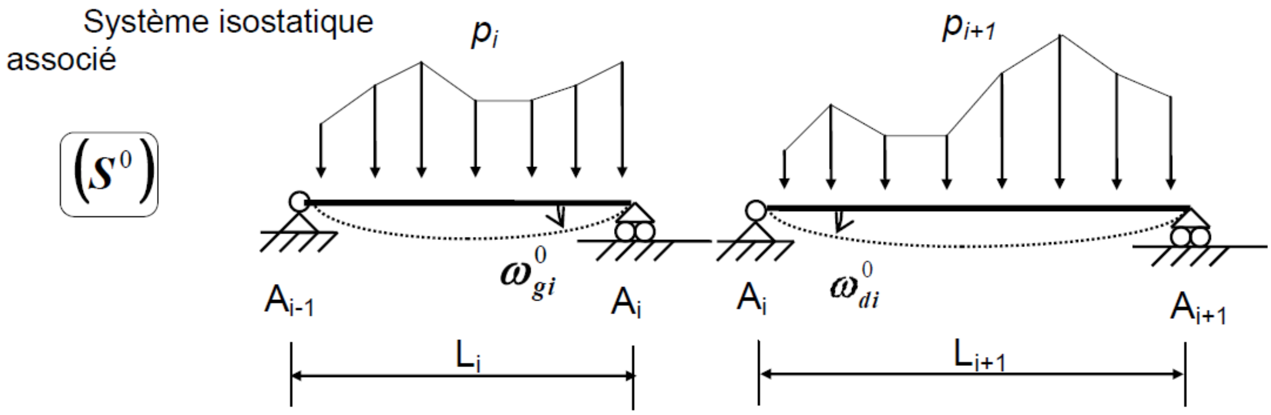
9. Méthode formule des 3 moments. (Poutre Encastrée + appui simple avec chargement uniforme)

AUTRE Méthode

On remplace l'encastrement en B par un appui fictif Bo

Avec une Longueur Lo $\approx$ 0.00 très petite, ainsi que Wdi $\approx$ 0.00 On choisit le point B





$$\boxed{L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1})M_i + L_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\omega^0_{di} - \omega^0_{gi})}$$

On choisit le point B comme référence avec Mo = 0; Lo=0; <u>MA=0</u>; et Wd=0

$$L.MA + 2(Lo + L).MB + L.MBo = 6EI(\omega d - \omega g)$$

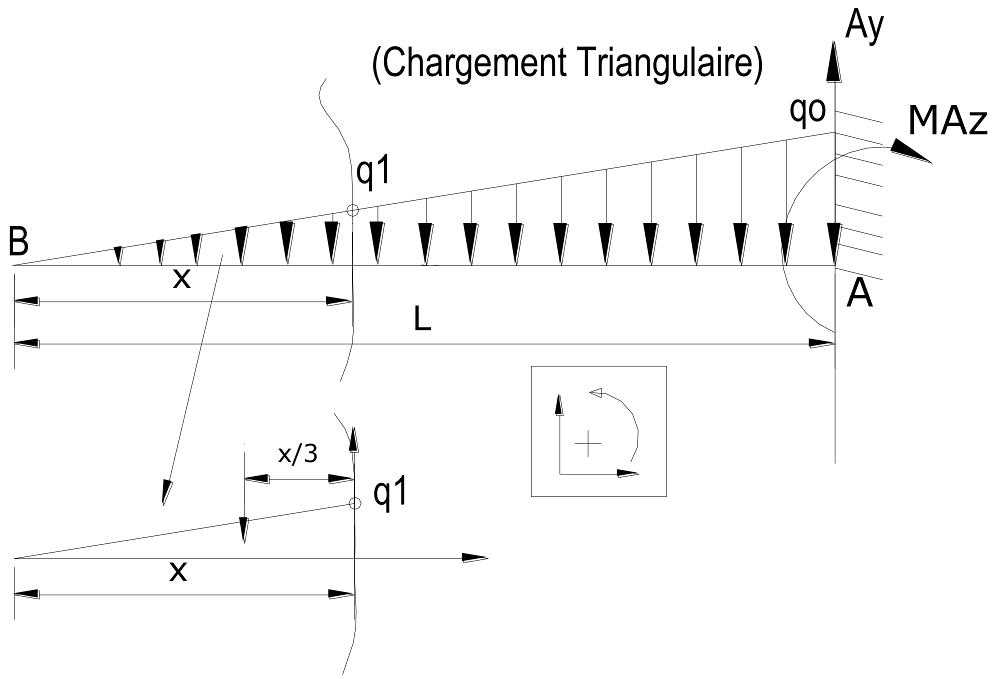
$$donc \Rightarrow 0 + 2(0 + L).MB + 0 = 6EI(0 - \omega g)$$

$$et \Rightarrow 3.L.MB = 6EI(-\omega g) \qquad on\, sait\, que\ \omega g = +\frac{qL^3}{24EI}$$

$$soit \Rightarrow 2.L.MB = 6EI(-\frac{qL^3}{24EI}) \qquad \boxed{\Rightarrow MB = \frac{6}{2} \times \frac{-qL^2}{24} = -\frac{qL^2}{8}}$$

$$\boxed{donc\ MB = -\frac{qL^2}{8}}$$

10. Console avec charge triangulaire:

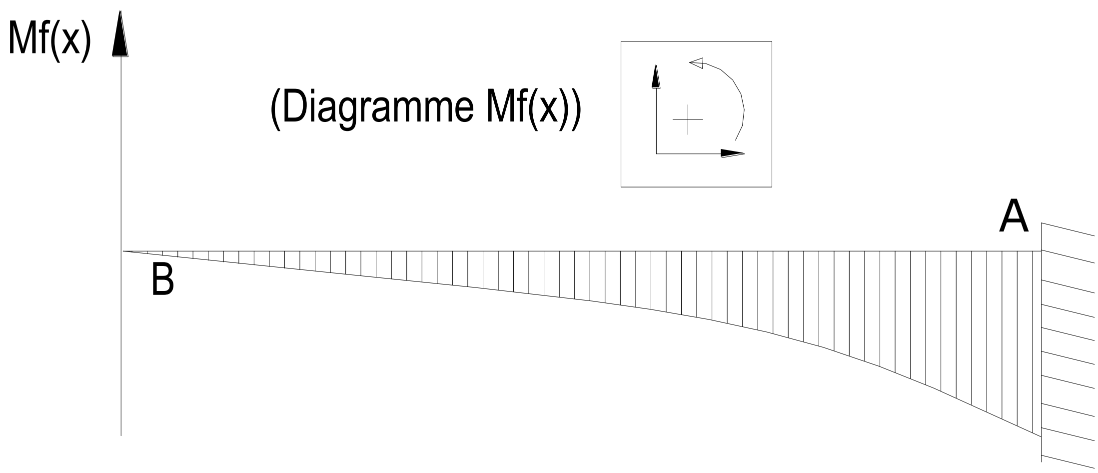


$$mf(x)+\left[\frac{(q1)\times x}{L}\right]\times\frac{x}{3}=0 \qquad avec\ q0=\frac{q1\times x}{L}$$

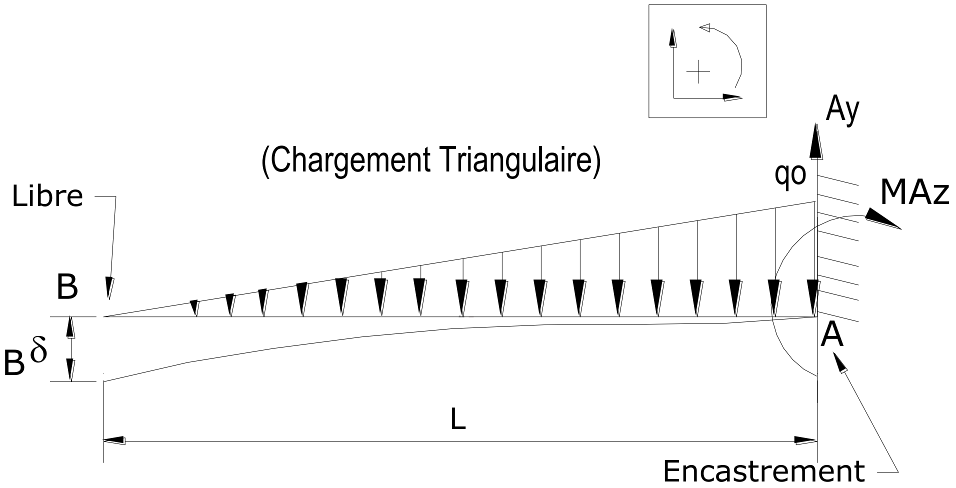
$$\boxed{mf(x)=\frac{-(q0)\times x^{3}}{6\times L}}$$

Réactions d'appuis au Pt (A):

$$\boxed{Ax=0\ et\ \ Ay=\left(\frac{q0\times L}{2}\right)\ \ et\ \ MAz=\left(\frac{-q0\times L^{2}}{6}\right)}$$



11. Calcul des déformées charge triangulaire



Equation des Moments:

$$mf(x) = \frac{-(q0) \times x^3}{6 \times L}$$

Pour l'équation de la déformée de Rotation W(x) :

$$\rightarrow \omega(x) = \int \frac{mf(x)}{EI}.dx = \frac{1}{EI} \times \left(\frac{-q0 \times x^4}{24 \times L} \right) + K1$$

(Conditions aux limites avec W(L) = 0 donc K1 ==>)

$$\rightarrow K1 = \left(\frac{q0 \times L^4}{24 \times L} \right) = \frac{q0 \times L^3}{24}$$

$$\rightarrow \omega(x) = \frac{1}{EI} \times \left(\frac{-q0 \times x^4}{24 \times L} + \frac{q0 \times L^3}{24} \right)$$

$$\rightarrow \omega(x) = \frac{-q0}{24EI} \times \left(\frac{x^4}{L} - L^3 \right)$$

Pour l'équation de la déformée de la flèche f(x) :

$$\rightarrow f(x) = \int \omega(x).dx$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{-q0}{24EI} \times \left(\frac{x^5}{5 \times L} - L^3 x \right) + K2$$

$$\rightarrow f(L) = \frac{-q0}{24EI} \times \left(\frac{L^5}{5 \times L} - L^4 \right) + K2 = 0$$

(Conditions aux limites avec f(L) = 0 donc K2 ==>)

$$\rightarrow K2 = \frac{q0}{24EI} \left(\frac{L^4}{5} - \frac{5L^4}{5} \right) = \frac{-q0 \times L^4}{30EI}$$

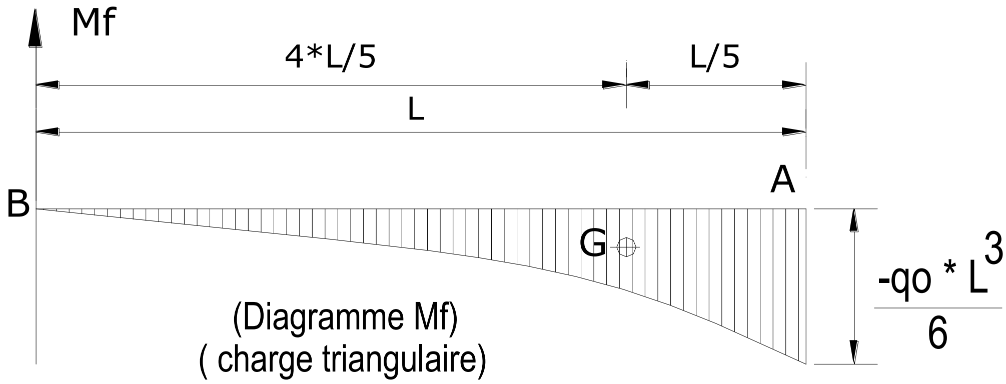
$$\rightarrow f(x) = \frac{-q0}{24EI} \times \left[\left(\frac{x^5}{5 \times L} \right) - L^3 x \right] - \frac{q0 \times L^4}{30EI}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{-q0}{120EI} \times \left[\left(\frac{x^5}{L} \right) - 5L^3 x + (4L^4) \right]$$

$$\rightarrow f\max = -\frac{q0 \times L^4}{30EI}$$

12. Méthode des intégrales de Mohr (Charge Triangulaire):

Démonstration du calcul de la surface et du centre de gravité



$$\rightarrow f(x)=\left(\frac{-q0\times x^3}{6\times L}\right)$$

$$\rightarrow Surface\ f(x)=\int_o^L\left(\frac{-q0\times x^3}{6\times L}\right).dx$$

$$\rightarrow Surface\ f(x)=\left[\left(\frac{-q0\times x^4}{24\times L}\right)\right]_0^L=\left(-\frac{q0\times L^4}{24\times L}\right)=-q0\times\left(\frac{L^3}{24}\right)$$

$$Soit\rightarrow Surface\ f(x)=-\left(\frac{q0\times L^3}{24}\right)$$

(surface négative! c'est normal)

Calcul du centre de gravité: $Avec\rightarrow M_{stat}=(Moment\ \ Statique)$

$$\rightarrow Cdg=\left(\frac{M_{stat}}{Surf}\right)=\frac{(M_{stat})}{\frac{q0\times L^3}{24}}$$

$$Avec\rightarrow M_{stat}=-q0\times\int_0^L\left(\frac{x^3}{6L}\right).x.dx$$

$$Avec\rightarrow M_{stat}=-q0\times\int_0^L\left(\frac{x^4}{6L}\right).dx=-q0\times\left[\frac{x^5}{30L}\right]_0^L=-q0\times\left[\frac{L^5}{30L}\right]$$

$$\rightarrow M_{stat}=\frac{-q0\times L^4}{30}$$

$$\rightarrow Cdg=\frac{\left(-\frac{q0\times L^4}{30}\right)}{-\frac{q0\times L^3}{24}}=\frac{24\times L^4}{30\times L^3}=\frac{4\times L}{5}$$

$$Résumé\rightarrow Surface=\left(\frac{q0\times L^3}{24}\right)\ \ et\ \ CdG(g)=\frac{4L}{5}\ \ et\ \ CdG(d)=\frac{L}{5}$$

Calcul des intégrales de MOHR par la méthode de VERECHTCHAGUINE:

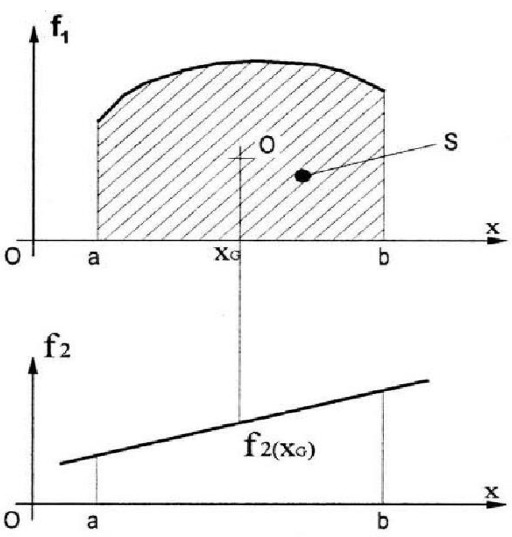
a

méthode de VERECHTCHAGUINE est une **astuce mathématique** qui permet de calculer la valeur d'une intégrale de MOHR qui est le produit de 2 fonctions, en sachant que la deuxième est linéaire.

Cette méthode n'est qu'un calcul graphique de l'intégrale à partir des graphes Mp et M1:(*)

*Mp (Graphe du système iso) *M1(Graphe du système unitaire)

<u>Démonstration:</u>



Soit l'intégrale: $I = \int_a^b f1.f2.dx \;\; avec \;\; f2 = \alpha.x + \beta$

En remplaçant **f2** par sa valeur on trouve:

$$I = \int_a^b f1(\alpha x + \beta).dx = \alpha \int_a^b f1.x.dx + \beta \int_a^b f1.dx$$

- La deuxième intégrale représente l'aire de la surface sous **f1** elle est donc égale à **S**.
- La première intégrale représente le moment statique de la surface S par rapport à l'axe Y.
- Elle a pour valeur : **S.XG**

$$D'ou \;\; I = \alpha.S.X_G + \beta.S = S(\alpha.X_G + \beta) = S.f2(X_G)$$

Le calcul nécessite donc de connaître la surface **S**, et le centre de gravité **G**.

<u>Dans le problème de l'intégrale de MOHR:</u>

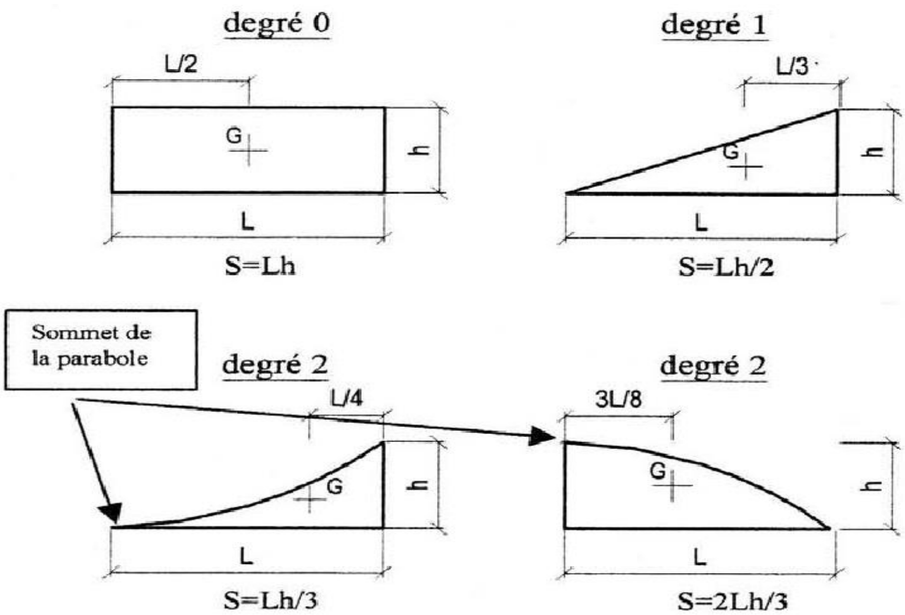
- Les fonctions dues à l'effort unité sont linéaires, si il n'y a pas continuité on décomposera l'étude sur des segments continus.

- Si la section est constante le long d'un intervalle (en général une barre), on peut sortir le dénominateur de l'intégrale.

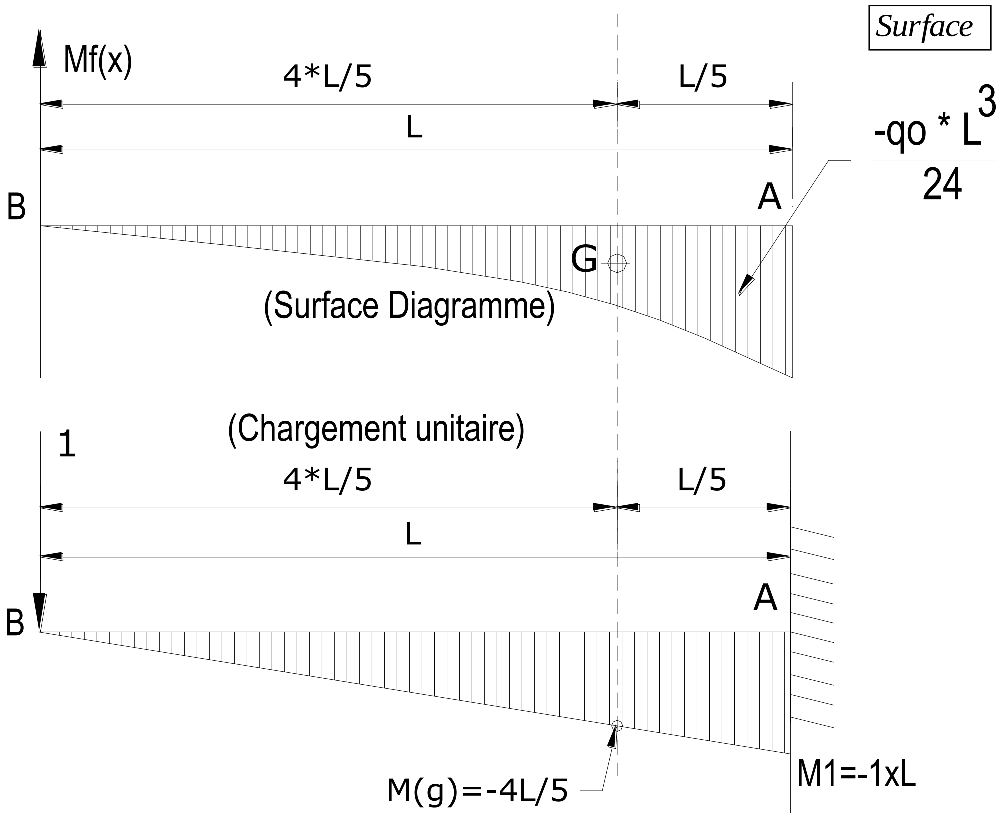
- Dans ces conditions il ne reste plus que le produit de 2 fonctions sous l'intégrale dont une linéaire, on peut essayer l'astuce.

Il est facile de retenir les valeurs de ce formulaire qui font l'objet d'une série logique:

Formulaire



Application de la méthode avec une force unitaire, pour le calcul de la déformée:

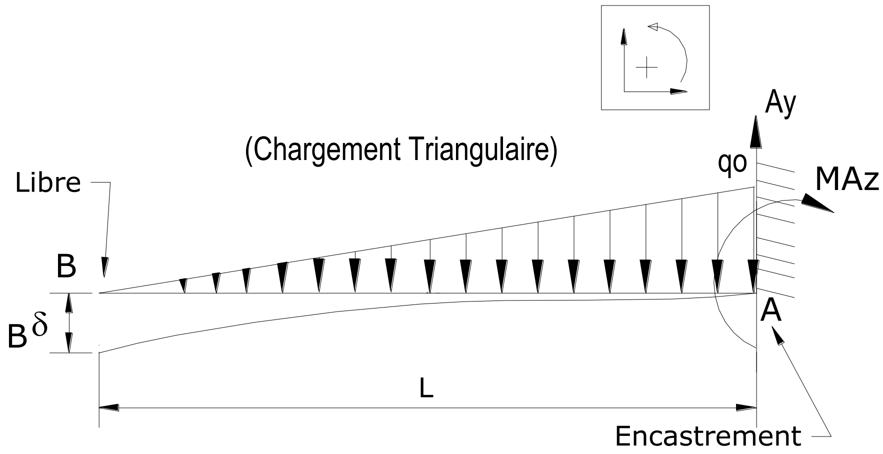


Ce qui nous donne:

$$\delta_B = \int_0^L \frac{M_0.M_1}{EI}.dx = \frac{1}{EI} \times \frac{qo \times L^3}{24} \times \frac{4 \times L}{5} = \frac{qo \times L^4}{30EI}$$

Application numérique:

qo = 10 kN/m L=2.70 m
E=2.1*10^5 Mpa
I/z = 1000 cm^4



Réactions d'appuis:

$$YA = \frac{+10 \times 2.70}{2} = +13{,}5\,kN$$

$$MAz = \frac{10 \times 3^2}{6} = -12{,}15\,kN.m$$

$$\delta_B = \frac{qo \times L^4}{30EI} = \frac{10 \times 10^{-3} \times 2{,}70^4}{30 \times 2.1 \times 10^{+5} \times 1000 \times 10^{-8}} = 8{,}43.10^{-3}\,m = 8{,}43\,mm$$

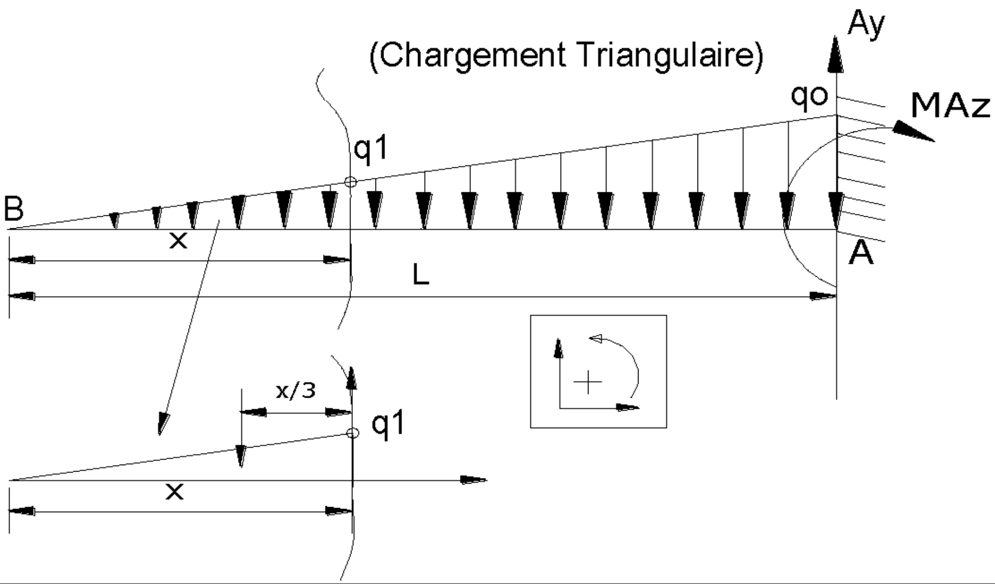
m. Cupani

Données des cellules modifiables

L=	2,70 m	qo=	10,00 kN/m
YA =	13,50 kN	MAz=	-12,15 kN*m
Module E=	210000 Mpa	Inertie=	1000 cm4

$$mf(x) = \frac{-(q0)\times x^3}{6\times L}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{-q0}{120EI}\times\left[\left(\frac{x^5}{L}\right) - 5L^3x + \left(4L^4\right)\right]$$



x=	0,00 m	0,24 m	0,48 m	0,72 m	0,96 m	1,20 m	1,44 m	1,68 m	1,92 m	2,16 m	2,40 m	2,70 m
Mf(x)=	0,00 kN,m	-0,01 kN,m	-0,07 kN,m	-0,23 kN,m	-0,55 kN,m	-1,07 kN,m	-1,84 kN,m	-2,93 kN,m	-4,37 kN,m	-6,22 kN,m	-8,53 kN,m	-12,15 kN,m
Flèche=	-8,44 mm	-7,50 mm	-6,56 mm	-5,63 mm	-4,70 mm	-3,79 mm	-2,90 mm	-2,07 mm	-1,32 mm	-0,69 mm	-0,23 mm	0,00 mm